ЧОУ «Православная классическая Гимназия-пансион Свято-Алексиевской Пустыни памяти протоиерея Василия Лесняка»

Методическая разработка на тему:

«Осмысленный подход к изучению правил на уроке математики»

Работу выполнила: Гуйван Елена Николаевна,

учитель математики

с. Новоалексеевка

Свято – Алексиевская Пустынь

2021 год

Математику изучать надобно,
поскольку она в порядок ум приводит.

М.В. Ломоносов

Несомненно, «порядок в голове» очень важен. Некоторые люди ещё в детстве решают, что математика – не для них. Порой кажется, что этот предмет слишком сложный и пониманию не подлежит. В чём причина таких убеждений? Непонятные темы наслаиваются друг на друга и не позволяют до конца усвоить новые, напрямую связанные с "недопонятыми". Если «снежный ком» к старшим классам становится катастрофическим, человек безвозвратно записывает себя в «гуманитарии» и выбирает свой дальнейший профессиональный путь, стараясь максимально избегать математики.

Но математику дети изучают здесь и сейчас. И главный их помощник в этом – школьный учитель. Именно он прививает интерес к предмету, показывает, насколько он нужен в реальной жизни, контролирует, все ли темы понятны ученику.

Моя задача как учителя сделать материал понятным, интересным, дать пищу для размышлений. Я должна удовлетворить интересы даже самых любознательных детей, поэтому ученику необходимо получить ответы на все свои вопросы.

Что может оттолкнуть ученика от предмета? Непонимание предмета. Правила, которые необходимо выучить, потом применить без осмысления. Например, всем известно, что на ноль делить нельзя. Но и тут у учеников могут возникнуть проблемы. Кто-то помнит, что на ноль делить нельзя, но не знает почему. А кто-то путается и считает, что ноль поделить на число нельзя. Ученик может забыть правило, потому что не понимает его смысла.

Давайте разберёмся, почему нельзя делить на ноль.[1]

Рассмотрим первый случай: невозможно обратное действие.

Если я всё-таки попытаюсь разделить, к примеру, 5 на 0, тогда в частном я должна получить какое-то Число:

5 : 0 = Число.

[1] Киселёв А. П. Арифметика. – М.: Физматлит, 2013.

И если я выполню обратное действие, умножив частное на делитель, я не получу данное делимое 5. Умножив частное на делитель 0, я получу 0.

Число $\times$ 0 $\neq$ 5;

Число $\times$ 0 = 0.

И второй пример: что получится, если разделить ноль на ноль? Я получу Частное, выполню обратное действие:

0 : 0 = Частное;

Частное $\times$ 0 = 0.

Обратное действие, казалось бы, возможно. Но чему равно это Частное? Я любое число умножу на ноль и получу ноль. Нет однозначного значения частного. Таких чисел бесконечно много.

Ещё примеры.

В современной жизни у нас часто возникает необходимость узнать, делится ли одно число на другое без остатка. Не всегда под рукой имеются технические средства, чтобы это быстро рассчитать. А на ОГЭ, ЕГЭ ученики и не воспользуются такими средствами. Для подсчета без калькулятора можно использовать признаки делимости.

В делимости большое значение имеет понимание разницы между цифрами и числами. Число, это как слова в русском языке. Чтобы записать число требуются буквы, т.е. особые знаки, это и есть цифры. Цифр всего 10, тогда как чисел можно придумать бесконечное множество.

Признаки делимости натуральных чисел можно разделить на 4 группы:

1 группа - когда делимость чисел определяется по последним цифрам числа - это признаки делимости на 2, 4, 5, 8, 20, 25, 50, 125, а также 10, 100, 1000 и т.д..

2 группа – когда делимость чисел определяется по сумме цифр числа -это признаки делимости на 3, 7, 8, 9, 11, 37, 75.

3 группа – когда делимость чисел определяется после выполнения математических действий с цифрами числа - это признаки делимости на 7, 13, 17, 19, 29, 33.

4 группа – признаки делимости на составные числа - это признаки делимости на 6, 12, 14, 15, 18, 30.

Рассмотри правила из школьного курса арифметики: признаки делимости на 3 и на 9.[2]

Предварительно заметим, что на 3 и на 9 делится всякое число, написанное посредством одной цифр 9, т. е. 9, 99, 999 и т. д.. Действительно,

999 : 3 = 333;   9999 : 3 = 3333 и т. д..

999 : 9 = 111;   9999 : 9 = 1111 и т. д..

Заметив это, возьмём какое-нибудь число, например 2952, и разложим его на отдельные единицы различных разрядов (кроме простых единиц, которые оставим без разложения):

2952 = 1000 + 1000 +

+ 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 +

+ 10 + 10 + 10 + 10 + 10 +

+ 2.

Разложим каждую тысячу на 999 и 1, каждую сотню - на 99 и 1, каждый десяток – на 9 и 1. Тогда место 2 тысяч получим 2 раза по 999 и 2 единицы; вместо 9 сотен получим 9 раз по 99 и 9 единиц; вместо 5 десятков – 5 раз по 9 и ещё 5 единиц. Следовательно:

2952 = 999 + 999 + 2 +

+ 99 + 99 + 99 + 99 + 99 + 99 + 99 + 99 + 99 + 9 +

+ 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 5 +

+ 2.

Слагаемые 999, 99, 9 делятся на 3 и на 9; значит, делимость данного числа на 3 или на 9 зависит только от суммы 2 + 9 + 5 + 2: если эта сумма делится (не делится) на 3 или на 9, то и данное число делится (не делится) на эти числа. Сумма чисел 2 + 9 + 5 + 2 есть сумма чисел, выражаемых цифрами данного числа, написанными отдельно; для краткости говорят, что это есть сумма цифр данного числа. Поэтому:

на 3 делятся все те и только те числа, у которых сумма цифр делится на 3;

[2] Киселёв А. П. Арифметика. – М.: Физматлит, 2013.

на 9 делятся все те и только те числа, у которых сумма цифр делится на 9.

В большей степени моих учеников и меня заинтересовал признак делимости на 7. Нам показалось удобным в работе использовать два признака делимости на 7. Формулировки признаков сложные. В работе используются не часто. Поэтому запомнить надолго не у всех получается. Нам стало интересно разобрать доказательства.

1) ***Признак делимости на 7.*** *Число делится на 7, если разница между этим числом без последней цифры и удвоенной последней цифрой делится на 7.*

Этот признак можно применять к числу рекурсивно несколько раз подряд, пока число не станет достаточно маленьким, поэтому этот признак называется **рекурсивным признаком делимости на 7**.

Пример. Проверить, делится ли на 7 число а) 364; б) 411; в) 31815.

Решение: а) 364. Число 364 без последней цифры — 36, удвоенная последняя цифра $4 \times 2 = 8$. Разность $36 - 8 = 21$, а число 21, как мы отлично знаем, делится на 7. Поэтому и число 364 делится на 7.

б) 411. Число 411 без последней цифры — 41, удвоенная последняя цифра — 2. Разность $41 - 2 = 39$, а число 39 на 7 не делится. Поэтому 411 не делится на 7.

в) 31815. Так как число большое, то в этом примере придётся применять правило несколько раз:

- $3181 - 10 = 3171$
- $317 - 2 = 315$
- $31 - 10 = 21$

Применив рекурсивно правило три раза, получили число 21. Число 21 делится на 7, поэтому и число 31815 делится на 7.

Доказательство. Пусть n— число, которое мы хотим проверить на делимость на 7. Покажем, что если nделится на 7, то и выражение

$$\frac{n - (n\ mod\ 10)}{10} - 2 \times (n\ mod\ 10)$$

делится на 7. В этом выражении mod – операция взятия остатка от деления.

Распишем выражение выше:

$$\frac{n-(n mod\ 10)}{10} - 2 \times (n mod\ 10) =$$

$$= \frac{n-(n mod\ 10)-20\times(n mod\ 10)}{10} = \frac{n-21\times(n mod\ 10)}{10}.$$

Так как слагаемое $21 \times (n mod\ 10)$ в числителе делится на 7 (число 21 делится на 7), то всё выражение делится на 7 тогда и только тогда, когда число n делится на 7.

Приведём пример. Пусть n = 966. Тогда 966 mod 10 = 6 (остаток от деления числа 966 на 10).

$$\frac{966-6}{10} - 2 \times 6 = 96 - 2 \times 6 = 84;$$

$$\frac{84-4}{10} - 2 \times 4 = 8 - 2 \times 4 = 0.$$

Ноль делится на 7, значит, число 966 делится на 7.

В этом доказательстве мы не получаем вывод формулы. Мы убеждаемся в справедливости утверждения, что *Число делится на 7, если разница между этим числом без последней цифры и удвоенной последней цифрой делится на 7.*

2) ***Признак делимости на 7.***

Признак делимости на 7 по сумме граней.

Определение. *Трёхзначные грани числа* — это числа, которые получены разбиением исходного числа на трёхзначные числа. Например, разбиение числа 1234567890 на трёхзначные грани выглядит так: 1|234|567|890 (разбиение числа начинается с его конца). Числа 1, 234, 567, 890 являются трёхзначными гранями числа 1234567890.

Признак делимости на 7. *Число делится на 7, если знакочередующаяся сумма его трёхзначных граней делится на 7.*

Термин «знакочередующаяся» означает, что первое слагаемое суммы берётся, например, со знаком «плюс», второе — со знаком «минус», третье — опять со знаком «плюс» и т.д. То есть знаки перед слагаемыми чередуются.

Пример. Проверить, делится ли на 7 число а) 626647; б) 23013; в) 99148.

Решение: а) 626647. Разбиение этого числа на трёхзначные грани выглядит так: 626|647. Знакочередующаяся сумма трёхзначных граней этого числа равна -626+647=21. Так как 21 делится на 7, то и число 626647 делится на 7. *Ответ:* делится.

б) 23013. Разбиваем число на трёхзначные грани: 23|013. Знакочередующаяся сумма трёхзначных граней этого числа есть -23 + 13 = -10. Число -10 на 7 не делится, поэтому число 23013 не делится на 7. *Ответ:* не делится.

в) 99148. Разбиваем число на трёхзначные грани: 99|148. Знакочередующаяся сумма трёхзначных граней этого числа равна -99 + 148 = 49. Число 49 делится на 7, поэтому и число 99148 делится на 7. *Ответ:* делится.

Когда я разбирала этот признак, то задалась вопросом: почему в каждой грани по 3 цифры, а не 2, например? И почему чередуются знаки?

Для примера я рассмотрела делимость числа 8 735 274 485 на 7.

Представила 8 735 274 485 в виде суммы:

$$\begin{aligned}8\,735\,274\,485 = {} & 8\times1\,000\,000\,000\ + \\ & +\ 735\times1\,000\,000\ + \\ & +\ 274\times1\,000\ + \\ & +\ 485\times1.\end{aligned}$$

И обратила внимание на то, что 1 000 000 000 делится на 7 с остатком 6 (1 000 000 000 : 7 = 142 857 142 + ост 6),

1 000 000 делится на 7 с остатком 1 (1 000 000 : 7 = 142 857 + ост 1),

1 000 делится на 7 снова с остатком 6 (1 000 : 7 = 142 + ост 6).

То есть, остатки принимают значения только 1 и 6.

Может ли быть другой остаток? Нет. Так как мы разбили число на грани по 3 цифры, то для того, чтобы получить число из следующей грани, большего разряда, я должна предыдущую грань 1000 000 000 умножить на 1000, то есть

$(1000\,000\,000 \times 1000):7 = (142\,857\,142 + \text{ост } 6) \times 1000;$

$142\,857\,142 \times 1000$ делится на 7 без остатка;

6×1000 делится на 7 с остатком 1.

А если я умножу подобным образом остаток 1 на 1000, то полученный результат будет делиться на 7 с остатком 6.

Теперь посмотрим, что мы получили:

$8\,735\,274\,485 = 8 \times 1\,000\,000\,000 + 735 \times 1\,000\,000 + 274 \times 1\,000 + 485 \times 1 =$

$= 8\times(7\times142857142 + \text{ост}6) + 735\times(7\times142857 + \text{ост}1) + 274\times(7\times142 + \text{ост}6) +$

$+ 485.$

Используя распределительное свойство умножения, мы раскроем скобки и увидим, что слагаемые $(8\times7\times142857142)$, $(735\times7\times142857)$, $(274\times7\times142)$ делятся на 7 без остатка, так как в каждом слагаемом есть сомножитель 7. Значит, делимость числа 8 735 274 485 на 7 будет зависеть от делимости на 7 суммы

$8\times6 + 735\times1 + 274\times6 + 485.$

Представлю (8×6) как $(8\times7 - 8)$, а (274×6) как $(274\times7 - 274)$, тогда получу выражение:

$8\times7 - 8 + 735\times1 + 274\times7 - 274 + 485.$

(8×7) и (274×7) делятся на 7 без остатка, поэтому делимость числа 8 735 274 485 на 7 будет зависеть от делимости на 7 выражения

$- 8 + 735 - 274 + 485.$

Теперь становится понятным, почему в каждой грани по 3 цифры. Потому что 1000, 1000 000, 1000 000 000 и т. д. дают при делении на 7 остатки 1 и 6, что в свою очередь делает удобным представление граней с коэффициентами +1 и -1.

Если ученик разберет доказательство этого признака самостоятельно или с помощью учителя, то принцип, по которому он определяет делимость числа на 7, у него отложится в памяти надолго.

Может возникнуть сомнение: а по силам ли каждому ученику разобрать подобные доказательства? Здесь на помощь приходит учитель. Учитель помогает ученику выполнять каждое действие осмысленно, понимать, что всё имеет причину, и алгоритмы – это не бессмысленная команда действий.

Изучая математику, ребенок развивает одновременно логическое и абстрактное мышление. С помощью законов логики он не только учится понимать пути решения той или иной задачи, но и в целом познает рациональный мир, который его окружает.

Представленные в этой работе доказательства утверждений, надеюсь, будут интересны и доступны детям, которые не считают себя математиками, а также удовлетворят даже самые пытливые умы.